

٢٢

وملائكة الله نظرية الوجود:

2. وملائكة الله:

والبرهان وملائكة الله نفرد عن عدلنا أنه يوجد بالبرهان إلى الذي لدينا (ج) لا  
أنه يوجد على آخر (ج) لا والحقة نفس النظر الابتدائية وحسين أنه  
وذلك كما يلي:

أولاً لدينا المعادلة (1) ولدينا حل آخر للمعادلة (1) هذا يعني :

$$(10) \quad w(z) = w_0 + \int_{z_0}^z f(z, w, w_0) dz$$

ولدينا مسبقاً "المعادلة (8) بالنسبة لـ  $w_0$

$$(8) \quad w_0 = w_0 + \int_{z_0}^z f(z, w_0, w_0) dz$$

نطرح (8) من المعادلة (10) :

$$w(z) - w_0 = \int_{z_0}^z [f(z, w, w_0) - f(z, w_0, w_0)] dz$$

باستخدام من شرط ليبتزش :

$$|w_1 - w_0| = \left| \int_{z_0}^z [f(z, w_1, w_0) - f(z, w_0, w_0)] dz \right|$$

هذا ليبتزش :

$$(11) \quad |w_1 - w_0| \leq A \int_{z_0}^z |w_1 - w_0| dz$$

الآن إذا فرضنا  $|E|$  للقيمة العظمى للمفرد في المجال  $|z - z_0| < \alpha$  فنحن

أنت نكتب المعادلة (11) ما يلي :

$$(11) \Rightarrow |w_1 - w_0| \leq A \int_{z_0}^z |E| dz = EA |z - z_0|$$

من صيغة (11) ونفرض النتيجة استنتجنا :

$$|w_1 - w_0| \leq A \int_{z_0}^z (EA |z - z_0|) dz = EA^2 \int_{z_0}^z |z - z_0| dz =$$

$$= EA^2 \frac{|z - z_0|^2}{2!}$$

وبذلك نأخذ :

$$(12) \quad |w_1 - w_0| \leq EA^2 \frac{|z - z_0|^n}{n!}$$

وعندما ننهي  $n \rightarrow \infty$  فإن (12)  $\rightarrow 0$  وبالتالي :

$$|w_1 - w_0| \leq 0 \Rightarrow |w_1 - w_0| = 0 \Rightarrow w_1 = w_0$$

أي أنه لا يوجد سوى حل واحد للمعادلة التفاضلية ولأخذ القيمة  $w_0$

عندما  $z = z_0$  .

(2)



نمين الحل بطريقة التفرع متسلسلة قوى للمعادلة من الدرجة الأولى:  
الحل الوحيد (2) لحالة القيم الابتدائية السابقة [111, 112] يتبين من  
أي حالة قليلة في متسلسلة قوى:

$$12. z_{12}, 13. z_{13}, \dots (14) \dots a_n (z - z_0)^n \dots (15)$$

والمطلوب هنا لإظهار الحل تعبير  $a_n$  في هذا التوسيم ذلك في طريقتين:  
1) ومنه تأيلو لحساب الأمثال (الطريقة الأولى):  
(التوسيم ومنه تأيلو لحساب الأمثال لتأيلو):

$$\frac{dw}{dz} = w(z) = f(z, w(z))$$

حساب حتمي وإيجاد المشتقات من المراتب العليا تم بوضوح في رسم حساب الأمثال  
لتأيلو الذي يعطى بالشكل:

$$a_n = \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} \quad n = 0, 1, \dots \quad (16) \text{ (المشتقات متسلسلة لـ)} z$$

حسية المشتقات تكون:

$$w' = f(z, w) = f$$

$$w'' = f_z + w' f_w$$

$$w''' = f_{zz} + w' f_{zw} + w'' f_{wz} + w' [f_{zz} + w' f_{zw}]$$

$$w''' = f_{zz} + 2w' f_{zw} + w'' f_{wz} + w'^2 f_{ww}$$

وهكذا.....

منه تأيلو ويتبين  $w = w_0$  عندما  $z = z_0$  لحس العلية:

$$a_n = \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!} ; n = 0, 1, \dots$$

نحصل في جميع الأمثال المطلوبة بوضوح في حسية الحل (الح) فيكون المطلوب:

(الطريقة الثانية): (طريقة التفرع والمطابقة والدسوس التدرجى لحساب الأمثال):

نأخذ بعين الاعتبار المعادلة التفاضلية (1):

$$w'(z) = f(z, w(z)) \dots (17)$$

ونقوم أولاً بتوسيم الطرف الأيمن بالشكل:

$$f(z, w(z)) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (z - z_0)^j (w - w_0)^j$$



ولدينا المثال من متسلسلة الحلق المعزوجة :

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ  $z$  :

$$w' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

منه ومن المطابقة (بعد التحويل في المعادلة (11))

$$(11) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} i a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{حيث } c_n = a_{n+1}$$

(  $w = w_0$  عندما  $z = z_0$  )

ولذلك لمقارنة الأمثلة على الطرفين ضمن على صيغ (د مساوية) نجد

كتابة الأمثلة (المعادلة)

معدومة :

(1) هذه الطريقة مبنية ودراسة التحويلات العددية

ممكن تطبيقه :

أو من المعادلة :

$$(1) \quad w = z^2 + w^2$$

والموافق للشرط (1)  $[w = 1 \text{ عندما } z = 0]$  ..... (2)

بطريقة التحويل المطابقة المستوية التحويلي

الحل :

أولاً نفرض الحل بشكل متسلسلة (متسلسلة)

$$(3) \quad w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

نستف هذه المعادلة بالنسبة لـ  $z$  مرة واحدة ونسوف في المعادلة المطابقة (1) :

$$(3)' \Rightarrow w = \sum_{n=0}^{\infty} i a_n z^{n-1}$$

ومنه بالتعويض في (1) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} i a_n z^{n-1} = z^2 + \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^2$$

نوعاً كل واحد من الطرفين الذي يسير للتجانس في المعادلة عند المطابقة



$$(14) \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot z^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k = z^2 + \sum_{j=0}^{\infty} z^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot z^j \quad (14)$$

وبالتالي بالمطابقة بين الامثال على الطرفين :

ومن اجل  $1 \neq 2$  من (14) :

$$(15) \quad \dots (1+a) a_{i+1} = \sum_{j=0}^i a_j \cdot a_{i-j} + a_{i+1} \quad i=2$$

من اجل  $i=2$  :

$$(16) \quad \dots 3a_3 = 1 + \sum_{j=0}^2 a_j \cdot a_{2-j} + a_{3+1}$$

فمن شرط البدء  $a_0 = 1$  واما عندما  $i=0$  :

$$a_0 + a_1 z + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot z^j = w(z)$$

$$\boxed{a_0 = 1}$$

نقل الى مستر النور محمد :

$$(17) \quad \dots \Rightarrow i=0 \Rightarrow a_1 = a_0 \cdot a_0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

$$i=1 \Rightarrow 2a_2 = a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 1}$$

$$(18) \quad \dots \Rightarrow 3a_3 = 1 + a_0 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_0 = 4$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{4}{3}$$

وهكذا .....

$$(2) \Rightarrow w(z) = 1 + z + z^2 + \frac{4}{3} z^3 + \dots$$

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية (نظرية الوجود) :

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية تكون على شكل :

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

حيث  $p(z)$  و  $q(z)$  دالتان تحليليتان في المتحول العقدي  $z$

التي  $w$  هي دالة المجهولة  $w$  بالنسبة للمتغير العقدي  $z$

ولنفرض هنا أن تكون الشروط الابتدائية كما يلي :

$$(2) \quad \dots [w(z_0) = c_0, w'(z_0) = c_1]$$

(الشروط الابتدائية من  $n-1$  حيث  $n$  رتبة المعادلة)



ولنفرض ان  $P(z)$  و  $q(z)$  هما القات منتظمتان (معلومتان) في المنطقة الزائفة  $z - z_0 \in R$  ولنبين انه يوجد داخل هذه الزائفة حل للمعادلة (1) دالة منتظمة [نقطة استمرارية]

ومن اجل ذلك نضع  $u$  كما في حالة معادلة صيغة جدار يمكن كتابة المعادلة (1) على شكل معادلتين من الرتبة الاولى:

$$\begin{cases} \frac{du}{dz} = -P(z)u - q(z)w \\ \frac{dw}{dz} = u \end{cases}$$

ومن اجل تناظر المتغيرات  $z$  و  $z_0$  سنبحث في الحالة  $z - z_0 \in R$  فقط. نحل معادلتين خطيتين

$$(3) \quad \left\{ \frac{du}{dz} = a(z)u + b(z)w, \quad \frac{dw}{dz} = c(z)u + d(z)w \right\}$$

و نثبت ان الحل لهذه الحالة هو منظم داخل الزائفة  $z - z_0 \in R$  محققاً شروط اديرييه باستكمال

$$(4) \quad [u|_{z=z_0} = \alpha, w|_{z=z_0} = \beta]$$

وكذلك سنرى ان تكون امكان للحل الجملة (3) هو دالة منتظمة داخل الزائفة المذكورة  $(a, b, c, d)$

وليفه القايه نقدم طريقة التقريبات المتتالية التي سيجد ولنصفه مفصلاً في الحالة السابقة من الرتبة الاولى.

اذ اننا افترضنا المعادلة (1) دالة منتظمة في الزائفة  $z - z_0 \in R$  افانه يوجد في هذه الزائفة حل وحيد للمعادلة (1) ونقده شروط (2)، مما لانص حينئذ بنسب المفروضتين  $\gamma$  و  $\delta$  وهذا الحل يكون

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$



مثال تطبيقي : مسألة التفاضل

لدينا المعادلة التفاضلية :

$$y'' + y' = 3x^2 \quad (1)$$

$$y = 0 \quad \text{عندما} \quad x = 0$$

[ملاحظة: المعادلة التفاضلية التامة مستو. نأخذ الحسبان المعاملات] التي

بما أن  $y$  هنا هي الدالة المجهولة وكلما كانت من الدرجة الثانية فإن المعادلة (1) و (2)

على صيغة قياسية وهي مكتوبة بالشكل :

$$y'' + y' = 3x^2 \quad (1) \quad \dots \quad (2) \quad \left[ y'' + y' = 3x^2 \right]$$

حيث لدينا أن:

$$y'' + y' = 3x^2 \quad \text{[مستو. نأخذ الحسبان المعاملات]}$$

$$y(0) = 1$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 1$$

$$y' = 3x^2 + 3y' \Rightarrow y' = 3$$

$$y'' = 6x + 6y'' + 3y'' \Rightarrow y''(0) = 6 + 9 = 15$$

وهكذا ...

ولدينا الحل الذي يتكون من سلسلة قوى

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

عند مستو. نأخذ الحسبان المعاملات  $a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$  حيث :

$$a_0 = y(0) = 1$$

$$a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = 1$$

$$a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{15}{3!} = \frac{5}{2}$$

$$y = 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{2} x^3 + \dots$$

ونتيجة : أو من حل مسألة التفاضلية :

$$y = e^x + x \cos x \quad (1) \quad \dots \quad (2) \quad y(0) = 0$$

بطريقة مستو. نأخذ الحسبان المعاملات